inl. 22 feb
1/3

089 Benader $f(x) = \sqrt{|x|}$ op $[-1,1]$ met een tweedegraads polynoom.

a) $M_0 = \int_{-1}^{1} \sqrt{|x|}\,dx = 2\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = 2\cdot\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 = 4/3$

$M_1 = 0$ want f is even

$M_2 = \int_{-1}^{1} x^2\sqrt{x}\,dx = 2\cdot\int_0^1 x^{5/2}\,dx = 4/7$

Dus $a_0 = 9/8\cdot 4/3 - 15/8\cdot 4/7 = 3/2 - 15/14 = 6/14 = 3/7$

$a_1 = 0$ (even)

$a_2 = 45/8\cdot 4/7 - 15/8\cdot 4/3 = \frac{45}{2\cdot 7} - \frac{15}{2\cdot 3} = \frac{3\cdot 45 - 7\cdot 15}{2\cdot 3\cdot 7}$

$= \frac{3\cdot 3\cdot 15 - 7\cdot 15}{2\cdot 3\cdot 7} = \frac{2\cdot 15}{2\cdot 3\cdot 7} = 5/7.$

en $p_2(x) = 3/7 + 5/7\,x^2$

b) $\cdot\ \|f\|^2 = \int_{-1}^{1} \sqrt{|x|}^2\,dx = 2\cdot\int_0^1 x\,dx =$

$\cdot\ \|p_2\|^2 = \int_{-1}^{1}\left(3/7 + 5/7\,x^2\right)^2 dx = 2\int_0^1 \frac{3^2}{7^2} + \frac{2\cdot 3\cdot 5}{7^2}x^2 + \frac{5^2}{7^2}x^4\,dx$

$= \frac{2\cdot 3^2}{7^2} + \frac{2\cdot 3\cdot 5}{7^2}\cdot\frac{2}{3} + \frac{5^2}{7^2}\cdot\frac{2}{5}$

$= \frac{2\cdot 3^2}{7^2} + \frac{2^2\cdot 5}{7^2} + \frac{2\cdot 5}{7^2} = \frac{10+20+18}{7^2} = \cancel{\frac{48}{7^2}}\ \frac{48}{49}$

c) $\|f - p_2\|^2 = \|f\|^2 - \|p_2\|^2 = 1 - \frac{48}{49} = \frac{1}{49}$

dus $\Delta = \|f - p_2\| = 1/7.$

vrl. 22 Feb
2/3

Lineaire regressie: kleinste kwadraten

Vb: Stel we hebben de meetwaarden $(x_0, y_0), \dots (x_{n-1}, y_{n-1})$, en we zoeken de functie $f(x) = \alpha + \beta x$ die deze het best benadert, in de zin dat $|f(x_0) - y_0|^2 + \dots + |f(x_{n-1}) - y_{n-1}|^2$ minimaal is.

1) Met $\vec{v} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$, $b_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_1 = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$,

Bepaal de projectie $\pi(\vec{v})$ van $\vec{v}$ op het vlak

$$V = \{ \alpha b_0 + \beta b_1 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$$

→ Orthogonaliseer b_0, b_1 tot b_0', b_1' met $b_0' \perp b_1'$

→ Bepaal $\pi(\vec{v}) = \lambda_0 b_0' + \lambda_1 b_1'$

→ Druk dit uit als $\pi(\vec{v}) = \alpha b_0 + \beta b_1$

Druk uit in
$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_0 + \dots x_{n-1})$
$\bar{y} = \frac{1}{n}(y_0 + \dots + y_{n-1})$
$\mathrm{Cov}(x,y) = \sum x_i y_i -$

2) Voor welke α, β is $\sum |f(x_i) - y_i|^2$ minimaal?

A: · Orthogonaliseer: $b_0' = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_1' = b_1 - \frac{\overbrace{(b_0', b_1)}^{\sum x_i}}{\underbrace{(b_0', b_0')}_{n}} b_0$

$= b_1 - \bar{x} \, b_0$.

$b_0' = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_1' = \begin{pmatrix} x_0 - \bar{x} \\ \vdots \\ x_{n-1} - \bar{x} \end{pmatrix}$

· $\lambda_0 = \frac{(b_0', v)}{(b_0', b_0')} = \frac{\sum_i y_i}{n} = \bar{y}$

· $\lambda_1 = \frac{(b_1', v)}{(b_1', b_1')} = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\frac{1}{n}\left(\sum_i x_i y_i - \bar{x} \cdot \sum y_i\right)}{\frac{1}{n}\left(\sum_i (x_i - \bar{x})^2\right)}$

dus $\lambda_1 = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\mathrm{var}(x)}$.

inl 22fel
3/3

Nu $P(v) = \lambda_0 e_0' + \lambda_1 e_1' = \lambda_0 e_0 + \lambda_1 (e_1 - \bar{x}\, e_0)$

Dus $P(\vec{v}) = \bar{y}\, e_0 + \frac{cov(x,y)}{var(x)} (e_1 - \bar{x}\, e_0)$

$= \frac{cov(x,y)}{var(x)} e_1 + \left(\bar{y} - \bar{x}\frac{cov(x,y)}{var(x)}\right) e_0$.

! Dus $\underset{\beta}{\cancel{\alpha}} = \frac{cov(x,y)}{var(x)}$ en $\underset{\alpha}{\cancel{\beta}} = \bar{y} - \bar{x}\underset{\beta}{\cancel{\alpha}} = \left(\bar{y} - \bar{x}\frac{cov(x,y)}{var(x)}\right)$.

2) De uitdrukking $\sum (f(x_i) - y_i)^2 = \sum (\alpha \cdot 1 + \beta x_i - y_i)^2$
is precies de afstand $\| \alpha \vec{e}_0 + \beta \vec{e}_1 - \vec{v} \|^2$.

Deze is dus minimaal voor α, β als boven.