1.13

Opgave: $\vec{e}_0 = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$, $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}-4\\7\\-1\end{pmatrix}$

Is $\vec{e}_i$ orthogonaal? orthonormaal?

Bepaal λ_i voor $\vec{v} = (x, y, z)$

Opl: orthogonaal, want $(e_0 e_1) = (e_1 e_2) = (e_0 e_2) = 0$

niet orthonormaal, want $(e_0 e_0) = 11$

Er geldt
$$\lambda_0 = (\vec{v}, \vec{e}_0)/(e_0 e_0) = (x + y + 3z)/11$$
$$\lambda_1 = (\vec{v}, \vec{e}_1)/(e_1 e_1) = (2x + y - z)/6$$
$$\lambda_2 = (e_2, \vec{v})/(e_2 e_2) = (-4x + 7y - z)/66$$

Opgave: 1.14 Maak hieruit een orthonormale basis $\vec{e}_i'$, en bereken de basiscoëfficiënten λ_i' t.o.v. deze basis. Hoe verhouden zich λ_i en λ_i'?

Opl: $\vec{e}_i' = \vec{e}_i/\|e_i\|$, dus $\vec{e}_0' = \frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$, $e_1' = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$, $e_3' = \frac{1}{\sqrt{66}}\begin{pmatrix}-4\\7\\-1\end{pmatrix}$

en
$$\lambda_0' = (e_0', \vec{v}) = \frac{1}{\sqrt{11}}(x + y + 3z)$$
$$\lambda_1' = (e_1', \vec{v}) = 1/\sqrt{6}\,(2x + y - z)$$
$$\lambda_2' = (e_2', \vec{v}) = 1/\sqrt{66}\,(-4x + 7y - z)$$

Dus de vector $\vec{e}_i'$ wordt $\|e_i\|$ keer zo klein

de coëfficiënt λ_i' wordt $\|e_i\|$ keer zo groot

(de coëfficiënten compenseren dus het feit dat de basis krimpt, om de vector hetzelfde te houden.)

Opg Gegeven $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$.

Vind het polynoom $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

zó dat $\int_{-1}^{1} |f(x) - p(x)|^2 dx$ minimaal is.

Druk uit in $\Phi_k = \int_{-1}^{1} x^k f(x)\, dx$

Opl. Projecteer f op de deelruimte

$$V = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \mid a_i \in \mathbb{R} \}.$$

Dit is een vectorruimte van dim. 4

met basis $1, x, x^2, x^3$ als $\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Om te projecteren orthogonaliseren je de basis:

$$\vec{e}_0{}' = 1$$

$$\vec{e}_1{}' = x - \Big(\frac{\overbrace{\langle 1, x \rangle}^{=0}}{\langle 1, 1 \rangle} \cdot 1 \Big)$$

$$= x$$

Merk op: inproduct

$$(x^n, x^m) = \int_{-1}^{1} x^{n+m} dx = \frac{1 + (-1)^{n+m}}{n+m+1} = \begin{cases} \frac{2}{n+m+1} & \text{als } n+m \text{ even} \\ 0 & \text{als } n+m \text{ oneven} \end{cases}$$

$$\vec{e}_2{}' = x^2 - \Big(\frac{\overbrace{\langle x, x^2 \rangle}^{=0}}{\langle x, x \rangle} \cdot x + \frac{\langle 1, x^2 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} \cdot 1 \Big)$$

$$= x^2 - \frac{2/3}{2} \cdot 1 = x^2 - 1/3$$

$$\vec{e}_3{}' = x^3 - \Big(0 + \frac{\langle x, x^3 \rangle}{\langle x, x \rangle} x + 0 \Big)$$

$$= x^3 - \frac{2/5}{2/3} x = x^3 - 3/5\, x$$

Merk op: $\|\vec{e}_0{}'\|^2 = 2$

$$\|e_1'\|^2 = \int_{-1}^{1} x^2 dx = 2/3$$

$$\|e_2'\|^2 = (x^2 - 1/3, x^2 - 1/3) = (x^2, x^2) - \tfrac{2}{3}(1, x^2) + \tfrac{1}{9}(1,1)$$

$$= 2/5 - \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 + 2/9 = 8/45$$

$$\|e_3'\|^2 = (x^3, x^3) - 2 \cdot \tfrac{3}{5} \cdot (x, x^3) + \left(\tfrac{3}{5}\right)^2 (x, x)$$

$$= \tfrac{2}{7} - \tfrac{6}{5} \cdot \tfrac{2}{5} + \tfrac{9}{25} \cdot \tfrac{2}{3} = 8/175$$

Nu: $P(f) = \lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1 \cdot x + \lambda_2 (x^2 - 1/3) + \lambda_3 (x^3 - 3/5 x)$

voor $\lambda_0 = \frac{\langle 1 f \rangle}{\langle 1 1 \rangle} = \frac{1}{2} \langle 1 f \rangle = \frac{1}{2} \int f(x) dx$

$\lambda_1 = \frac{\langle x, f \rangle}{\langle x x \rangle} = \frac{3}{2} \int x f(x) dx$

$\lambda_2 = \frac{\langle l_2' f \rangle}{\langle l_2' l_2' \rangle} = \frac{45}{8} \int (x^2 - 1/3) f(x) dx$

$\lambda_3 = \frac{\langle l_3' f \rangle}{\langle l_3' l_3' \rangle} = \frac{175}{8} \int \left(x^3 - \frac{3}{5} x\right) f(x) dx$

Dus $\quad P = \left(\lambda_0 - \frac{1}{3}\lambda_2\right) \cdot 1 + \left(\lambda_1 - \frac{3}{5}\lambda_3\right) x$

$+ \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 .$

$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 ,$

met $a_3 = \lambda_3 = \frac{175}{8} \int_{-1}^{1} x^3 f dx - \frac{105}{8} \int x f dx$

$a_2 = \lambda_2 = \frac{45}{8} \int x^2 f dx - \frac{15}{8} \int f(x) dx$

$a_1 = \lambda_1 - \frac{3}{5} \lambda_3 = \frac{45}{8} \int x f dx - \frac{105}{8} \int x^3 f dx$

$a_0 = \lambda_0 - \frac{1}{3} \lambda_2 = \frac{9}{8} \cdot \int f dx - \frac{15}{8} \int x^2 f dx$

Voor $f(x) = 3 + 15 x^2$:

$M_0 = 16, \ M_1 = 0, \ M_2 = 8, \ M_3 = 0,$

dus $a_0 = 3, \ a_1 = 0, \ a_2 = 15, \ a_3 = 0$

zoals het hoort. (f ligt immers in W)