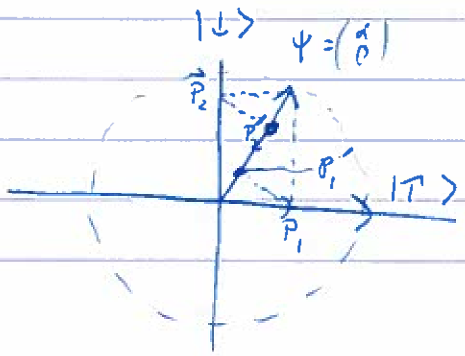
Opgave: Stel een electron heeft spintoestand
$\psi = \binom{\alpha}{\beta} = \alpha |\uparrow\rangle + \beta |\downarrow\rangle$, in $\mathbb{C}^2$,
waarin $|\uparrow\rangle = \binom{1}{0}$ en $|\downarrow\rangle = \binom{0}{1}$, en $\|\psi\|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

a) Wat is de projectie P_1 van ψ op $\mathbb{C} \cdot |\uparrow\rangle$?
En de projectie P_2 van ψ op $\mathbb{C} \cdot |\downarrow\rangle$?
Bereken $\|P_1\|^2$ en $\|P_2\|^2$ (De kans op $\sigma_z = 1$ of -1 in toestand ψ)

b) Wat is de projectie P_1' van P_1 op ψ?
En de projectie P_2' van P_2 op ψ?
Bereken $\|P_1'\|^2 + \|P_2'\|^2$, (de kans dat, na een meting van σ_z, het electron nog steeds in de toestand ψ verkeert.)

A: a)
$$P_1 = \frac{\langle \uparrow | \psi \rangle}{\langle \uparrow | \uparrow \rangle} |\uparrow\rangle = \alpha |\uparrow\rangle$$
$$P_2 = \frac{\langle \downarrow | \psi \rangle}{\langle \downarrow | \downarrow \rangle} |\downarrow\rangle = \beta |\downarrow\rangle$$
$$\|P_1\|^2 = |\alpha|^2, \qquad \|P_2\|^2 = |\beta|^2$$

b)
$$P_1' = \frac{\langle \psi, \alpha \uparrow \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle} \psi = |\alpha|^2 \psi$$
$$P_2' = \frac{\langle \psi, \beta \downarrow \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle} \psi = |\beta|^2 \psi$$
$$\|P_1'\|^2 + \|P_2'\|^2 = |\alpha|^4 + |\beta|^4$$



Hermite-Polynomen

Opgave

Zij V de complexe vectorruimte van functies $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ met $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 e^{-x^2/2} < \infty$, met inproduct

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}\, g(x)\, e^{-x^2/2}\, dx$$

① ~~het~~ dit inproduct tussen f en g is het "normale" inproduct $\int_{-\infty}^{\infty} \overline{F(x)}\, G(x)\, dx$ tussen $F = \frac{f e^{-x^2/4}}{(2\pi)^{1/4}}$ en $G = \frac{g e^{-x^2/4}}{(2\pi)^{1/4}}$

Antw: $\int \overline{F} G\, dx = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int \overline{f(x)} e^{-\frac{1}{4}x^2} \cdot g(x) e^{-\frac{1}{4}x^2}\, dx$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \overline{f(x)}\, g(x)\, e^{-x^2/2}\, dx$$

② Voor de functies $l_n = x^n$ geldt

$$\langle l_n, l_m \rangle = \begin{cases} 0 & \text{als } n+m \text{ oneven} \\ \frac{2^k k!}{(2k)!} & \text{als } n+m = 2k \text{ even} \end{cases}$$

Antw: $\langle l_n, l_m \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{n+m} e^{-x^2/2}\, dx$.

Dit is 0 als $n+m$ oneven is (oneven functie).

Anders is dit $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} e^{-x^2/2}\, dx$

Nu geldt $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} e^{-x^2/2}\, dx = \cancel{\left[x^{2k-1} e^{-x^2/2} \right]_{-\infty}^{\infty}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-x^{2k-1} e^{-x^2/2} \right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{(2k-1)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k-2} e^{-x^2/2}\, dx.$$

Dus als $\Gamma_{2k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} e^{-x^2/2}\, dx$,

dan $\Gamma_{2k} = (2k-1) \cdot \Gamma_{2(k-1)} = (2k-1)(2k-3)\, \Gamma_{2(k-2)} \cdots$.

Nu is $\Gamma_0 = 1$, dus $\Gamma_{2k} = (2k-1) \cdot (2k-3) \cdots 3 \cdot 1$

$$= 2^k k! / (2k)!$$

(3) Orthogonaliseer l_0, l_1, l_2, l_3

$l_0' = l_0 = 1$.

$l_1' = l_1 - \frac{\langle l_0 l_1 \rangle}{\langle l_0' l_0' \rangle} l_0 = l_1 = x$

$l_2' = l_2 - \frac{\langle l_0' l_2 \rangle}{\langle l_0 l_0 \rangle} l_0 - \underbrace{\frac{\langle l_1' l_2 \rangle}{\langle l_1' l_1' \rangle}}_{=0} l_1 = x^2 - 1$

$l_3' = l_3 - \frac{\langle l_1' l_3 \rangle}{\langle l_1' l_1' \rangle} l_1 = x^3 - \frac{1}{3}x$

want $l_3 \perp l_0'$, $l_3 \perp l_2'$

(4) De polynomen $l_0', l_1', l_2' \ldots$ heten ook wel de Hermite-polynomen ~~H~~ $h_0, h_1, h_2, \ldots$.

Laat zien dat $h_{n+1} = x h_n - h_n'$

Antw: ~~Stel~~ Zij $h := x h_n - h_n'$

$\rightarrow$ zeker is h van deg $n+1$ als h_n van graad n is; $x h_n$ is van deg $n+1$, en h_n' van graad $n-1$

$\rightarrow$ als $m \leq n$, dan is $\langle h, h_m \rangle = 0$.

Immers

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x h_n - h_n') h_m e^{-x^2/2} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x h_n h_m e^{-x^2/2} + h_n \frac{d}{dx}(h_m e^{-x^2/2}) dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x h_n h_m e^{-x^2/2} + h_n \cdot h_m \cdot (-x e^{-x^2/2}) dx$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h_n \left(\frac{d}{dx} h_m\right) e^{-x^2/2} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h_n \left(\frac{d}{dx} h_m\right) e^{-x^2/2} dx$$

Nu is $\frac{d}{dx} h_m$ een polynoom van graad $\leq m-1 < n$,

dus $h_n \perp \frac{d}{dx} h_m$; $\langle h_n, \frac{d}{dx} h_m \rangle = 0$.

Dus h is een polynoom van graad $n+1$ dat met $h \perp h_0, h_1, \ldots, h_n$.

Omdat $h(x) = x^{n+1} + \ldots$ moet dus $\underline{\underline{h = h_{n+1}}}$.

(5) Laat zien dat de genererende functie

$$G(s,x) := \sum_{n=0}^{\infty} h_n(x)\, s^n/n!$$

voldoet aan $\frac{d}{ds} G(s,x) = x\, G(s,x) - \frac{d}{dx} G(s,x)$

met $G(0,x) = 1$

Bew: $\frac{d}{ds} G = \sum_{n=0}^{\infty} n\, h_n(x)\, s^{n-1}/n! = \sum_{n=0}^{\infty} h_{n+1}(x)\, s^n/n!$

$$-\frac{d}{dx} G = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\partial_x h_n(x)\right) s^n/n! = \sum_{n=0}^{\infty} -x\, h_n(x)\, s^n/n! + \sum_{n=0}^{\infty} h_{n+1}(x)\, s^n/n!$$

$$x\, G = \sum_{n=0}^{\infty} x\, h_n(x)\, s^n/n!$$

Dus $\left(x - \frac{d}{dx}\right) G(s,x) = \frac{d}{ds} G(s,x)$.

en $G(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(x)\, 0^n/n! = h_0(x) = 1$.

6. Er geldt dus $G(s,x) = e^{sx - s^2/2}$

want $G(0,x) = 1$, $\cancel{\frac{d}{ds}G = xG, \frac{d}{dx}G =}$

en $\frac{d}{ds} G(s,x) = (x - s) G(s,x)$

en $\left(x - \frac{d}{dx}\right) G(s,x) = (x - s) G(s,x)$.

7. Laat zien dat $h_n(x) = \frac{d^n}{ds^n}\Big|_{s=0} e^{sx - s^2/2}$,

dus $\boxed{h_n(x) = e^{\frac{1}{2}x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{1}{2}x^2}}$

vol: $h_n(x) = \frac{d^n}{ds^n} \left(\sum_{m=0}^{\infty} h_m(x) s^m/m! \right)$,

vanwege de taylorexpansie van $e^{sx - s^2/2}$.

$\frac{d^n}{ds^n} s^m \Big|_0 = 0$ als $m \neq n$, en $n!$ als $n = m$.

Dus $h_n(x) = \frac{d^n}{ds^n}\Big|_{s=0} e^{sx - s^2/2} = \cancel{\frac{d^n}{ds^n} e^{-\frac{1}{2}(s-}}$

$= \frac{d^n}{ds^n}\Big|_0 e^{-\frac{1}{2}(s-x)^2} \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} = e^{\frac{1}{2}x^2} \frac{d^n}{ds^n}\Big|_{s=0} e^{-\frac{1}{2}(s-x)^2}$

$= e^{\frac{1}{2}x^2} \frac{d^n}{ds^n}\Big|_{s=x} e^{-\frac{1}{2}s^2} = e^{\frac{1}{2}x^2} \frac{d^n}{ds^n} e^{-\frac{1}{2}x^2}$