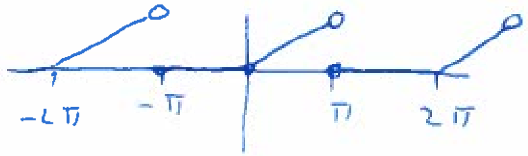
In leveren
zg fel
1/3

Teken de grafiek van de volgende 2π-periodieke functies en bereken hun Fourierreeks.

a) $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ als } & -\pi \leq x \leq 0 \\ x \text{ als } & 0 \leq x < \pi \end{cases}$



als $k \neq 0$: $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} x e^{-ikx} dx$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} x \, d\left[-\frac{1}{ik} e^{-ikx}\right] = \frac{1}{2\pi}\left(\left[-\frac{x}{ik} e^{-ikx}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{1}{ik} e^{-ikx} dx\right)$$

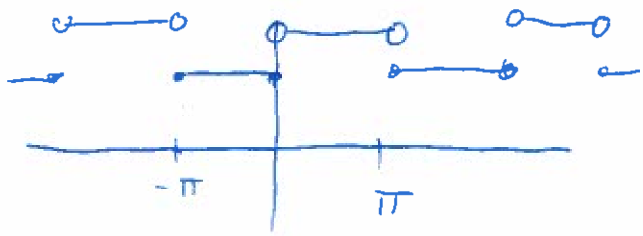
$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{(-\pi)(-1)^k}{ik}\right) - \frac{1}{2\pi}\left[\left(-\frac{1}{ik}\right)^2 e^{-ikx}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}}{2ik} + \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{2\pi}\left((-1)^k - 1\right)$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}}{2ik} + \frac{(-1)^k - 1}{2\pi k^2}$$

$$\left\{ \begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} x \, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{2} x^2\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{4}\pi \end{aligned} \right\}$$

b) $f(x) = \begin{cases} 2 \text{ als } & -\pi \leq x \leq 0 \\ 3 \text{ als } & 0 < x < \pi \end{cases}$



$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 5/2$

als $k \neq 0$: $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} e^{-ikx} + \frac{3}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-ikx} dx$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-1}{ik} e^{-ikx}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{3}{2\pi}\left[-\frac{1}{ik} e^{-ikx}\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{-1}{ik\pi}\left[\left(1 - (-1)^k\right) + \frac{3}{2}\left((-1)^k - 1\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2ik\pi}\left(1 - (-1)^k\right)$$

Dus $P_N(x) = \left(\sum_{\substack{k=-N \\ k \neq 0}}^{N} \frac{1}{2\pi i k}\left(1 - (-1)^k\right) e^{ikx}\right) + 5/2$

Inlev 29feb 2/3

Als $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodiek is met $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ voor $-\pi \le x < \pi$, schets de grafiek en bereken de fourier-coëfficiënten c_k.

Schrijf de fourier reeks $P_N(x)$ in termen van goniometrische functies $\sin(kx)$ en $\cos(kx)$.

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{4\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{x} e^{-ikx}\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} e^{-x} e^{-ikx}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{1-ik}\Big[e^{(1-ik)x}\Big]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{-1-ik}\Big[e^{(-1-ik)x}\Big]_{-\pi}^{\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{1-ik}\left((-1)^k e^{\pi} - (-1)^k e^{-\pi}\right) + \frac{1}{-1-ik}\left((-1)^k e^{-\pi} - (-1)^k e^{\pi}\right)\right)$$

$$= \frac{(-1)^k}{4\pi}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)\left(\frac{1}{1-ik} + \frac{1}{1+ik}\right)$$

$$\hookrightarrow = \frac{(1+ik)}{(1-ik)(1+ik)} + \frac{(1-ik)}{(1+ik)(1-ik)} = \frac{2}{1+k^2}$$

dus

$$c_k = (-1)^k \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \cdot \frac{1}{1+k^2}$$

Merk op: f is even en reëel, dus $c_{-k} = \overline{c_k} = c_k$; $c_{-k} = c_k$ en c_k is reëel.

$$P_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx} = c_0 1 + \sum_{k=1}^{N} c_k e^{ikx} + \underbrace{c_{-k}}_{=c_k} e^{-ikx}$$

$$= c_0 1 + \sum_{k=1}^{N} (-1)^k \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \cdot \frac{1}{1+k^2}\underbrace{\left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right)}_{=2\cos(kx)}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} + \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi}\sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{1+k^2}\cos(kx)$$

(Alternatief kun je natuurlijk de formule $P_N = \frac{1}{2}a_0 + \sum a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$ met $a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx$ en $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = 0$ gebruiken.)

Inleveren
opgave
3/3

Voor welke a in $\mathbb{R}$ is $\| f - ag \|$ minimaal, waar $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$ en het inproduct is dat van $L^2([0,1])$, dus $\langle \phi, \phi' \rangle = \int_0^1 \overline{\phi(x)} \phi'(x)\, dx$.

A: Dit is de projectie $P(f) = \frac{\langle g f \rangle}{\langle g g \rangle} g$ van f op de ruimte $\{ag \mid a \in \mathbb{R}\}$.

$$\langle g, f \rangle = \int_0^1 e^{-x} \cdot e^{x} dx = \int_0^1 1\, dx = 1$$

$$\langle g g \rangle = \int_0^1 (e^{-x})^2 dx = \int_0^1 e^{-2x} dx = \left[-\tfrac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^1$$

$$= -\tfrac{1}{2} e^{-2} + \tfrac{1}{2}$$

Dus $a = \dfrac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2}} = \dfrac{2}{1 - e^{-2}}$.