

Opgaven WC donderdag 25 februari

Opgave 0.1. Schets de functie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ met periode 2, die gegeven is door $f(x) = -1$ voor $-1 < x < 0$, $f(x) = 1$ voor $0 < x < 1$ en $f(0) = f(1) = 0$. Schets ook de functie $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ met periode 2, gegeven door $g(x) = 0$ voor $-1 < x < 0$, $g(x) = 2$ voor $0 < x < 1$ en $g(0) = g(1) = 1$.

- Bereken de Fouriercoëfficiënten van f . (Als het goed is heb je dit maandag al gedaan.)
- Stel je weet de Fouriercoëfficiënten c_k van f en c'_k van h . Wat zijn dan de Fouriercoëfficiënten c''_k van de functie $g = f + h$?
- Wat zijn de Fouriercoëfficiënten van g ?

Opgave 0.2. We bekijken de 2π -periodieke functie die gegeven is door $f(x) = |\sin x|$ voor x in \mathbb{R} .

- Teken de grafiek van f (minstens twee perioden). Is f even, oneven en/of reëel? Wat betekent dit voor de coëfficiënten a_k en b_k van p_N ten opzichte van de goniometrische basis die bestaat uit $C_k(x) = \cos(kx)$, $S_k(x) = \sin(kx)$ en de constante functie $\frac{1}{2}$?
- Bereken de coëfficiënten a_k en b_k in de reeks $f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$.
Hint: laat zien dat $\sin(x) \cos(kx) = \frac{1}{2}(\sin(k+1)x - \sin((k-1)x))$.

Opgave 0.3. Zij a een reëel getal ongelijk aan nul.

- Bepaal de Fouriercoëfficiënten c_k van de 2π -periodieke functie f gegeven door $f(x) = e^{ax}$ als $-\pi \leq x < \pi$.
- Pas de Stelling van Parseval toe op deze functie, en bereken zo de oneindige som

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 + k^2}.$$