

Inleveropgaven maandag 21 maart

Lang niet alle differentiaalvergelijkingen zijn lineair. We bekijken de differentiaalvergelijking

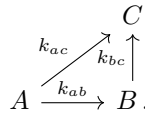
$$\frac{d}{dt}x(t) = x^2(t). \quad (1)$$

Opgave 0.1. Laat zien dat de differentiaalvergelijking (1) niet lineair is.

- Ga na dat de functie $x(t) = \frac{1}{c-t}$ een oplossing is van (1) voor elk getal c . Is het veelvoud $x(t) = \frac{\lambda}{c-t}$ ook een oplossing is van (1) voor elk getal λ ?
- De functies $x_1(t) = \frac{1}{c_1-t}$ en $x_2(t) = \frac{1}{c_2-t}$ zijn dus oplossingen van (1). Is hun som $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ ook een oplossing van (1)?
- Is de functie $L: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, gegeven door $L(x) = x^2$, een lineaire afbeelding?

In de volgende opgave zijn de differentiaalvergelijkingen wel weer lineair.

Opgave 0.2. Stel dat een verbinding A zowel in B als in C vervalt, en dat ook B in C vervalt,



De vervalsconstanten k_{ab} , k_{bc} en k_{ac} zijn alle drie strikt positief, en voldoen aan $k_{ab} + k_{ac} \neq k_{bc}$. We berekenen het verloop van de concentraties van $[A]_t$, $[B]_t$, en $[C]_t$ als functie van de tijd, met als beginvoorwaarde dat op $t = 0$ alleen de stof A aanwezig is met concentratie a_0 . Dus $[A]_{t=0} = a_0$, $[B]_{t=0} = 0$ en $[C]_{t=0} = 0$.

- De concentraties $[A]_t$, $[B]_t$ en $[C]_t$ voldoen dan aan het stelsel lineaire differentiaalvergelijkingen van de vorm

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[A]_t &= a[A]_t \\ \frac{d}{dt}[B]_t &= b[A]_t + c[B]_t \\ \frac{d}{dt}[C]_t &= d[B]_t + e[A]_t. \end{aligned}$$

Geef de constanten a , b , c , d en e in termen van k_{ab} , k_{bc} en k_{ac} .

- Schrijf het stelsel vergelijkingen in matrixvorm $\frac{d}{dt}\vec{v}_t = A\vec{v}_t$, en geef de beginvoorwaarde $\vec{v}_{t=0}$.
- Bereken de eigenwaarden λ_1 , λ_2 , λ_3 van A , en kies een basis \vec{v}_1 , \vec{v}_2 , \vec{v}_3 van eigenvectoren. Neem hierbij (en in het vervolg van de opgave) aan dat $k_{ab} = k_{bc} = k_{ac} = 1$.
- Los de differentiaalvergelijking $\frac{d}{dt}\vec{v}_t = A\vec{v}_t$ op voor de juiste beginvoorwaarde \vec{v}_0 . Geef $[A]_t$, $[B]_t$ en $[C]_t$.
- Wat doen deze oplossingen voor $t = 0$ en $t \rightarrow \infty$?

De volgende tentamenopgave is het minst goed gemaakt. Probeer hem nogmaals te maken zonder naar de uitwerkingen te kijken.

Opgave 0.3. De functie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ met periode 2π is gegeven door $f(x) = e^{|x|}$ voor $-\pi \leq x < \pi$.

- a) Schets de grafiek van f . (Minstens twee perioden.)
- b) Bereken de Fouriercoëfficiënten c_k in de Fourierpolynomen

$$p_N(x) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx}$$

van f .

- c) Geef het eerstegraads Fourierpolynoom $p_1(x)$ van f . Schrijf dit in de vorm $p_1(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x)$, en geef de constanten a_0 , a_1 en b_1 .