Inleveropgave 21 Mrt

1/4

Opgave: Een DV die niet lineair is.

$$\frac{dx}{dt} = x(t)^2$$

a) ga na dat $x(t) = \frac{1}{c-t}$ een oplossing is op $t \neq c$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(c-t)^{-1} = -(c-t)^{-2} \cdot (-1) = \frac{1}{(c-t)^2} = x(t)^2$$

b) Als $x_1(t) = \frac{1}{c_1 - t}$ en $x_2(t) = \frac{1}{c_2-t}$ opl. zijn,

~~is dan $x_3(t) = x_1(t) + x_2(t)$ een oplossing?~~

Is $\lambda \cdot x_1(t)$ een oplossing voor alle λ in $\mathbb{C}$?

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x_3(t) = \frac{d}{dt} x_1(t) + \frac{d}{dt} x_2(t) = x_1^2(t) + x_2(t)^2 \\ x_3^2(t) = (x_1(t) + x_2(t))^2 \end{cases}$$

Maar $(x_1(t) + x_2(t))^2 \neq x_1(t)^2 + x_2^2(t)$,

omdat $2 \cdot x_1(t) \cdot x_2(t) \neq 0$.

Dus de som is geen oplossing.

Net zo: als $\frac{d x_1(t)}{dt} = x(t)^2$,

dan $\frac{d}{dt}(\lambda x_1(t)) = \lambda \frac{d}{dt} x_1(t) = \lambda x_1(t)^2$

Maar $(\lambda x_1(t))^2 = \lambda^2 x_1(t)^2$

Dus $\frac{d}{dt}(\lambda x(t)) \neq (\lambda x(t))^2$ in het algemeen!

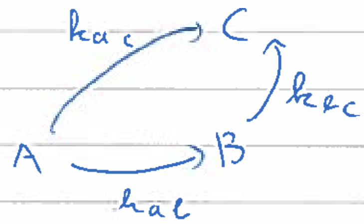
(alleen voor $\lambda = 1$ ~~...~~ klopt dit wel natuurlijk).

c Is $L(x) = x^2$ lineair?

Nee: $L(\lambda) x = \lambda^2 x$, niet λx.

ook is $L(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)^2 \neq x_1^2 + x_2^2 = L(x_1) + L(x_2)$.

Opgave:



a) De Differentiaal vergelijkingen zijn

$$\frac{d}{dt}[A]_t = -(k_{ab} + k_{ac})[A]_t$$

$$\frac{d}{dt}[B]_t = k_{ab}[A]_t - k_{bc}[B]_t$$

$$\frac{d}{dt}[C]_t = k_{bc}[B]_t + k_{ac}[A]_t$$

b) Met $v_t = \begin{pmatrix} [A]_t \\ [B]_t \\ [C]_t \end{pmatrix}$ hebben we $\frac{d}{dt} v_t = \begin{pmatrix} -(k_{ab}+k_{ac}) & 0 & 0 \\ k_{ab} & -k_{bc} & 0 \\ k_{ac} & k_{bc} & 0 \end{pmatrix} v_t$

met $v_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) De matrix A is dan $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

en de eigenwaardenvergelijking is

$$0 = \det(\lambda \mathbb{1} - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda+2 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda+1 & 0 \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda+1)(\lambda+2).$$

De Eigenwaarden zijn dus $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -2$.

De bijbehorende Eigenvectoren zijn voor

$\lambda_3 = -2$:

$$\left.\begin{array}{l} -2x_1 = -2x_1 \\ x_1 - x_2 = -2x_2 \\ x_1 + x_2 = -2x_3 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x_1 \text{ vrij} \\ x_2 = -x_1 \\ x_3 = 0 \end{array}$$

Dus $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (of een veelvoud)

$\lambda_2 = -1$,

$$\left.\begin{array}{l} -2x_1 = -x_1 \\ x_1 - x_2 = -x_2 \\ x_1 + x_2 = -x_3 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 \text{ vrij} \\ x_3 = -x_2 \end{array}$$

$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (of een veelvoud)

$\lambda_0 = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, x_3 vrij $\leadsto$ $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (of veelvoud)

d) $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

dus $c_3 = a_0$, $c_2 = a_0$, $c_1 - c_2 = 0 \leadsto c_1 = a_0$

En $\underline{c_1 = c_2 = c_3 = a_0}$.

Dus $\vec{v}_t = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$= a_0 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= a_0 \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \\ 1 - e^{-t} \end{pmatrix}$$

Dus [A],

Dus: $[A]_t = a_0 e^{-2t}$

$[B]_t = a_0 (e^{-t} - e^{-2t})$

$[C]_t = a_0 (1 - e^{-t})$

e) Op $t=0$: $[A]_0 = a_0$, $[B]_0 = [C]_0 = 0$ zoals het hoort.

Voor $t \to \infty$: $[A]_t \to 0$

$[B]_t \to 0$

$[C]_t \to a_0$

ook zoals het hoort.