Opgaven WC donderdag 7 april

Opgave 0.1. De functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ wordt gegeven door $f(x) = \cos(x)$ voor $|x| \leq \pi/2$, en $f(x) = 0$ voor $|x| > \pi/2$. De functie $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ wordt voor $x \neq \pm 1$ gegeven door $g(x) = \frac{\cos(\pi/2x)}{x^2-1}$.

a) Schets de grafiek van f.

b) Bereken de Fouriergetransformeerde $\mathcal{F}f(\omega)$ van f voor $\omega \neq \pm 1$.

c) Bereken $\mathcal{F}f(-1)$ en $\mathcal{F}f(1)$.

d) Hoe luidt de Fourier inversieformule voor f?

e) Wat is de Fouriergetransformeerde van de functie g? (Hint: kijk nog eens naar b en d.)

Opgave 0.2. De 2π-periodieke functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ wordt gegeven door $f(x) = xe^x$ voor $-\pi \leq x < \pi$.

a) Schets de grafiek van f (minstens twee perioden). Is f continu in $x = \pi$?

b) Bereken de Fouriercoëfficiënten c_k van f. Voor welke x is

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx} = xe^x\,?$$

c) Wat is $\lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} c_k$? En wat is $\lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} (-1)^k c_k$?

Opgave 0.3. We bekijken de differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial}{\partial t} f_t(x) = \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} - \frac{\partial}{\partial x} \right) f_t(x)$$

voor gladde, integreerbare functies $f_t\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

a) Als de Fouriergetransformeerde van $f_0(x)$ op tijdstip $t = 0$ gelijk is aan $\mathcal{F}f_0(\omega)$, wat is dan de Fouriergetransformeerde $\mathcal{F}f_t(\omega)$ van de oplossing op tijdstip t?

b) Laat zien dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_t(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f_0(x)|^2 dx\,,$$

bijvoorbeeld door de Stelling van Plancherel op het linker- en rechterdeel van bovenstaande vergelijking los te laten.

Opgave 0.4. We bekijken de vectorruimte V van functies $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die 2π-periodiek zijn in beide variabelen, $f(x+2\pi, y) = f(x, y)$ en $f(x, y+2\pi) = f(x, y)$. Het inproduct is

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f}(x, y) g(x, y) dx dy\,.$$

Voor $k_1 = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ en $k_2 = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ bekijken we de functies $b_{k_x,k_y}(x) = e^{i(k_x x + k_y y)}$.

a) Laat zien dat ieder tweetal verschillende functies b_{k_x,k_y} en $b_{k'_x,k'_y}$ loodrecht op elkaar staat. Wat is $\|b_{k_x,k_y}\|^2$?

b) De projectie p_N van een functie f op de vectorruimte W_N van lineaire combinaties van de functies b_{k_x,k_y} met $-N \leq k_x, k_y \leq N$, is zelf natuurlijk ook een lineaire combinatie. Zij kan dus geschreven worden als

$$p_N(x, y) = \sum_{k_x=-N}^{N} \sum_{k_y=-N}^{N} c_{k_x,k_y} e^{i(k_x x + k_y y)}.$$

Geef de coëfficiënten c_{k_x,k_y} in termen van f. (Analoog aan de formule voor de Fouriercoëfficiënten c_k voor periodieke functies van één variabele.)