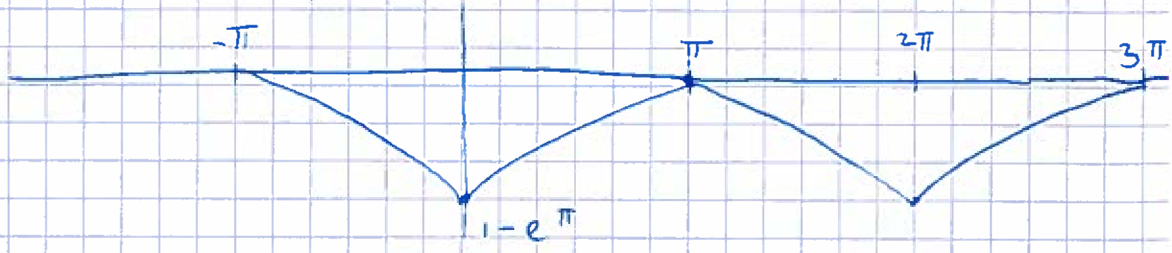
De 2π-periodieke functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ is gegeven door $f(x) = e^{|x|} - e^{\pi}$ voor $-\pi \le x < \pi$.

a) Schets de grafiek van f (minstens 2 perioden)



b) ~~Werken~~ Bepaal de Fourier coëfficiënten c_k waarvoor $f(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}$.

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} (e^{-x} - e^{\pi}) e^{-ikx}\, dx + \int_{0}^{\pi} (e^{x} - e^{\pi}) e^{-ikx}\, dx \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} e^{(-1-ik)x}\, dx + \int_{0}^{\pi} e^{(1-ik)x}\, dx - e^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx}\, dx \right)$$

als $k \neq 0$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\frac{-1}{1+ik} e^{-(1+ik)x} \right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{1-ik} e^{(1-ik)x} \right]_{0}^{\pi}$$

$$- \frac{e^{\pi}}{2\pi} \left[\frac{e^{-ikx}}{-ik} \right]_{-\pi}^{\pi}$$

als $k = 0$

$$- \frac{e^{\pi}}{2\pi} \cdot 2\pi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{-1 + e^{\pi} \cdot (-1)^k}{1 + ik} + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{(-1)^k e^{\pi} - 1}{1 - ik}$$

$+ 0$ als $k \neq 0$ of $- e^{\pi}$ als $k = 0$

Dus $c_0 = \dfrac{e^{\pi}-1}{\pi} - e^{\pi}$ en

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\left((-1)^k e^{\pi} - 1\right)\left(\frac{1}{1+ik} + \frac{1}{1-ik}\right)$$

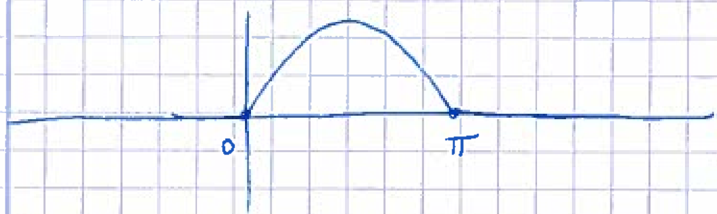
$$= \frac{(-1)^k e^{\pi} - 1}{\pi(1+k^2)} \quad \text{als } k \neq 0.$$

ⓒ Dit is $f(3\pi)$. Omdat f 2π-periodiek is, is dit gelijk aan $f(\pi) = 0$ (zie grafiek.)

De functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ wordt gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \leq 0 \\ \sin(x) & \text{als } 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{als } x \geq \pi \end{cases}$$

a) Schets f



b) Bereken de Fouriergetransformeerde $\mathcal{F}f(\omega)$

$$\mathcal{F}f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} \sin(x)\, e^{-i\omega x}\, dx \qquad \omega \neq \pm 1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\, e^{-i\omega x}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\frac{1}{2i} \int_0^{\pi} e^{i(1-\omega)x}\, dx - \frac{1}{2i} \int_0^{\pi} e^{-i(1+\omega)x}\, dx \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\frac{1}{2i} \left[\frac{1}{i(1-\omega)} e^{i(1-\omega)x} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{2i} \left[\frac{+1}{i(1+\omega)} e^{-i(1+\omega)x} \right]_0^{\pi} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\frac{1}{2(\omega - 1)} \left(-e^{-i\omega\pi} - 1 \right) + \frac{-1}{2(1+\omega)} \left(-e^{-i\omega\pi} - 1 \right) \right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cdot \left(1 + e^{-i\omega\pi} \right) \cdot \left(\frac{+1}{1+\omega} + \frac{1}{1-\omega} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1 + e^{-i\omega\pi}}{1 - \omega^2}$$

c) Gebruik de Fourier inversieformule voor $x = \pi/2$ om $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}w)}{1-w^2}\,dw$ te berekenen.

De inversie formule $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(w)\, e^{iwx}\,dw$ voor $x = \pi/2$, $f(x) = 1$ levert

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+e^{-iw\pi}}{1-w^2}\, e^{iw\pi/2}\,dw$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iw\pi/2} + e^{-iw\pi/2}}{1-w^2}\,dw$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\cos(\frac{\pi}{2}w)}{1-w^2}\,dw \, ,$$

dus $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}w)}{1-w^2}\,dw = \pi$

Opgave

a)

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{1}{m}p(t)$$

$$\frac{d}{dt}p(t) = -k\,x(t)$$, dus $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/m \\ -k & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix}$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/m \\ -k & 0 \end{pmatrix}.$$

b)

$$iA = \begin{pmatrix} 0 & i/m \\ -ik & 0 \end{pmatrix}$$ is hermitisch als $\overline{i/m} = -ik$, dus

als $\underline{k = 1/m}$.

c)

De differentiaal vergelijking $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_t \\ p_t \end{pmatrix} = -i(iA)\begin{pmatrix} x_t \\ p_t \end{pmatrix}$
is in dat geval
$= -iH\begin{pmatrix} x_t \\ p_t \end{pmatrix}$

met H hermitisch.
We hebben dus $\left\|\begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix}\right\|^2 = \left\|\begin{pmatrix} x(0) \\ p(0) \end{pmatrix}\right\|^2$,

dus $|x(t)|^2 + |p(t)|^2$ is constant.

Als $x(0)$ en $p(0)$ reëel zijn, dan zijn $x(t)$ en $p(t)$ dat ook, dus $x(t)^2 + p(t)^2 = x_0^2 + p_0^2$

We bekijken de Differentiaal vergelijking

$$\frac{\partial}{\partial t} f_t(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_t(x) - f_t(x)$$

Voor integreerbare functies $f_t : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

a) Als een oplossing $f_t(x)$ op tijdstip $t=0$ Fourier getransformeerde $\mathcal{F}f_0(\omega)$ heeft, wat is dan de Fourier getransformeerde $\mathcal{F}f_t(\omega)$ op tijdstip t?

$$f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f_t(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega \quad , \text{ dus}$$

$$= \begin{cases} \partial_t f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \partial_t \mathcal{F}f_t(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega \text{ en} \\ (\partial^2/\partial x^2 - 1) f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f_t(\omega)\,(-\omega^2 - 1)\, e^{i\omega x}\, d\omega \end{cases}$$

Dus $\partial_t \mathcal{F}f_t(\omega) = -(1+\omega^2)\,\mathcal{F}f_t(\omega)$ met $\mathcal{F}f_{t=0}(\omega) = \mathcal{F}f_0(\omega)$

Dus $\underline{\mathcal{F}f_t(\omega) = e^{-(1+\omega^2)t}\, \mathcal{F}f_0(\omega)}$.

b) Stel dat de integraal $I_t = \int_{-\infty}^{\infty} f_t(x)\, dx$ op tijdstip $t=0$ gelijk is aan 1. Wat is dan I_t?

~~(Hint: wat is het verband tussen I_t en $\mathcal{F}_t(\omega=0)$~~

(Hint: Kijk naar $\mathcal{F}f_t(\omega=0)$ en gebruik a))

$$\mathcal{F}f_t(\omega=0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_t(x) \cdot 1\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} I_t .$$

Dus $I_t = \sqrt{2\pi}\, \mathcal{F}f_t(0) = \sqrt{2\pi} \cdot \mathcal{F}f_0(0) \cdot e^{-t}$

$$= I_0 \cdot e^{-t} = \underline{\underline{e^{-t}}} .$$

~~$I_1 = e^{-1}$~~

c)

$$\mathcal{F} f_0(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{-i\omega x}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2 + 2i\omega x)}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+i\omega)^2 - \frac{1}{2}\omega^2}\, dx$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\omega^2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\tilde{x}^2}\, d\tilde{x}$$

mit $\tilde{x} = x + i\omega$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\omega^2}.$$

Das $\mathcal{F} f_t(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(1+\omega^2)t} e^{-\frac{1}{2}\omega^2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t} \cdot e^{-\frac{1}{2}(1+2t)\omega^2}.$$

Das $f_t(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t} e^{-\frac{1}{2}(1+2t)\omega^2} \right) e^{i\omega x}\, d\omega$

$$= \frac{e^{-t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(1+2t)\omega^2 + i\omega x}\, d\omega$$

$$= \frac{e^{-t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+2t}\,\omega - \frac{ix}{\sqrt{1+2t}}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{x^2}{1+2t}}\, d\omega$$

$$= \frac{e^{-t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\tilde{\omega}^2} \frac{d\tilde{\omega}}{\sqrt{1+2t}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{1+2t}}$$

$$\tilde{\omega} = \sqrt{1+2t}\,\omega - \frac{ix}{\sqrt{1+2t}}$$

$$d\tilde{\omega} = \sqrt{1+2t}\, d\omega$$

$$= \frac{e^{-t}}{\cancel{2}\pi} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{1+2t}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{1+2t}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{1+2t} - t}}{\sqrt{2\pi(1+2t)}}.$$